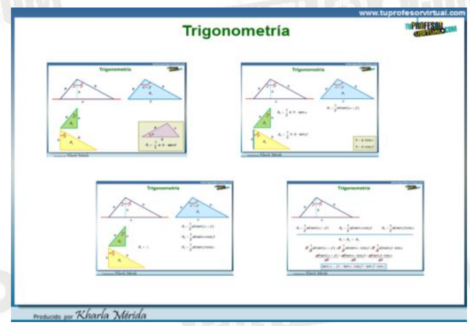
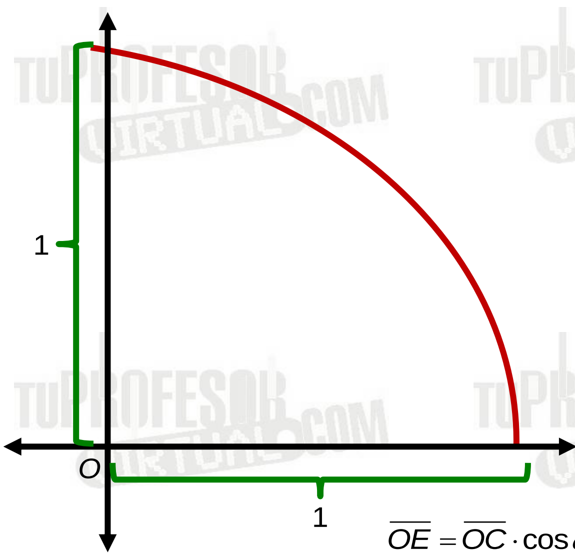
Producción de los Resúmenes: Kharla Mérida

Deducción de Identidad

En la lección anterior dedujimos la fórmula del seno de la suma de ángulos en esta lección vamos a deducir la fórmula del coseno de la suma acompáñanos





Para hacer esta deducción, representaremos el primer cuadrante del plano cartesiano, y el arco de circunferencia trigonométrica correspondiente a este cuadrante recordemos que la circunferencia trigonométrica tiene radio de una unidad de longitud

$$\overline{OE} = \overline{OC} \cdot \cos\alpha$$

$$\overline{OC} = \cos\beta$$

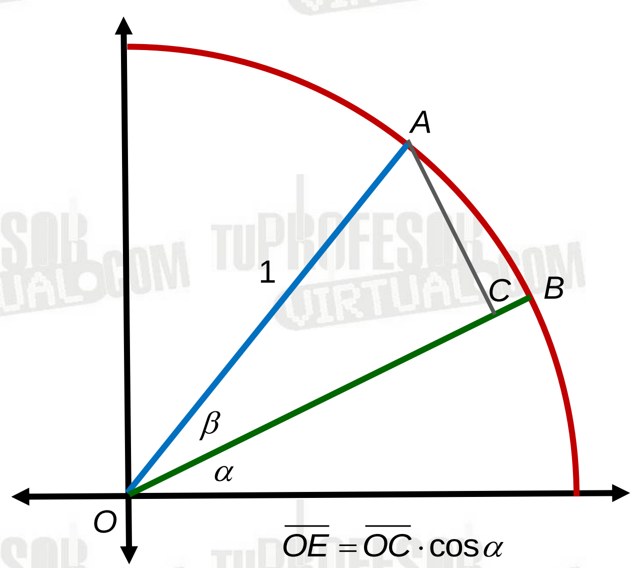
$$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OD}$$

$$\overline{OE} = \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\beta = \overline{AC}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \overline{AC}$$



Ahora trazamos dos radios, uno formando un ángulo alfa con el eje x positivo, y otro formando un ángulo beta con el radio anterior los puntos extremos de los radios los llamaremos A y B proyectaremos el punto A sobre el segmento OB, y al pie de la proyección lo llamaremos C

$$\overline{OE} = \overline{OC} \cdot \cos\alpha$$

$$\overline{OC} = \cos\beta$$

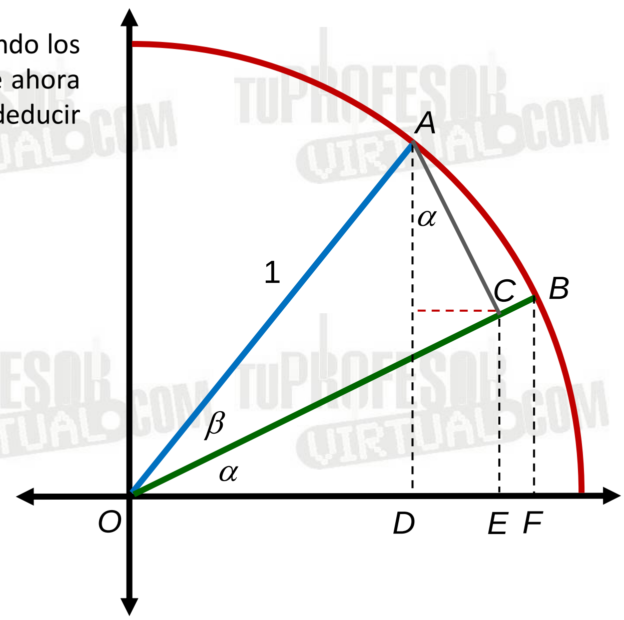
$$\overline{OE} = \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

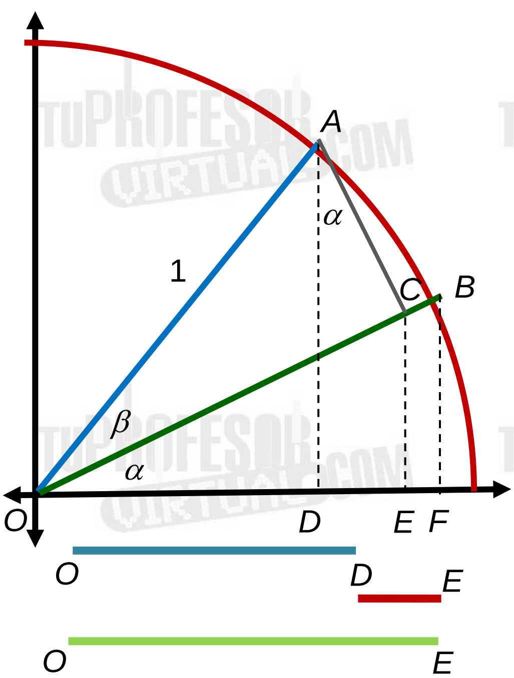
$$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OD} \qquad \operatorname{tg}\beta = \overline{AC} \qquad \operatorname{sen}\beta = \overline{AC}$$

Producción de los Resúmenes: Kharla Mérida

Proyectamos los puntos A, C y B sobre el eje x indicando los pie de las proyecciones con D, E y F respectivamente ahora estableceremos algunas igualdades necesarias para deducir la fórmula del coseno de la suma





Una es que la longitud del segmento OD es el resultado de restar a la longitud del segmento OE la longitud del segmento DE por otro lado, sabemos que el coseno de un ángulo es cateto adyacente sobre hipotenusa aplicando esto al triángulo OAD de la figura, tenemos que coseno de alfa más beta es cateto adyacente, AD, sobre hipotenusa, 1

$$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{CA}}{H}$$

Por otro lado el coseno de alfa más beta es igual a cateto adyacente que es la longitud del segmento OD entre hipotenusa que es 1 coseno de alfa más beta es igual a la longitud del segmento OD

$$\cos(\alpha + \beta) = \overline{OD}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{H} \quad \frac{\overline{OE}}{\overline{OC}}$$

$$\cos\beta = \frac{CA}{H} \quad \frac{\overline{OC}}{1}$$

Coseno de alfa es igual a cateto adyacente, OE, entre hipotenusa, OC pero OC es el cateto adyacente de el triángulo OAC entonces coseno de beta es cateto adyacente, OC, entre hipotenusa, 1 de modo que OC es igual a coseno de beta

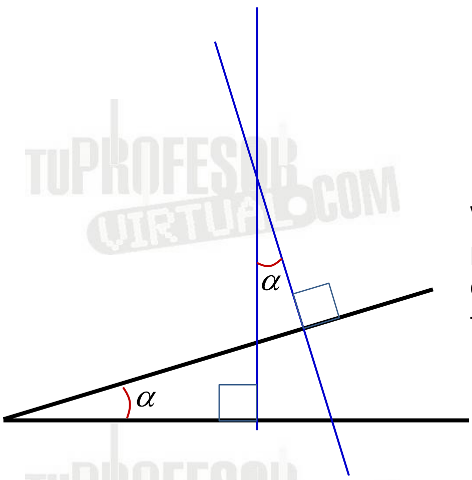
$$\cos\beta = \overline{OC}$$

Producción de los Resúmenes: Kharla Mérida

Sustituyendo la igualdad de OC en la igualdad del coseno de alfa nos queda coseno de alfa igual a OE, entre coseno de beta despejando OE queda igual a coseno de alfa por coseno de beta de la ecuación inicial sólo esta faltando escribir la medida del segmento DE en función de razones trigonométricas

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OE}}{\cos\beta}$$

$$\overline{OE} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$



Vamos a proyectar el segmento. DE a nivel del punto C por otra parte, debemos recordar que si se cortan los lados de un ángulo con rectas o segmentos perpendiculares estas rectas o segmentos, forman un ángulo de la misma medida que el ángulo inicial

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{AC}}{1}$$

El segmento DE es opuesto al ángulo alfa, entonces podemos decir que seno de alfa es igual a DE sobre AC. AC es el cateto opuesto de beta, de modo que seno de beta es cateto opuesto, AC, entre hipotenusa, 1 de donde seno de beta es AC

$$\operatorname{sen}\beta = \overline{AC}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{DE}}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\overline{DE} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Sustituimos esto en la expresión del seno de alfa y queda seno de alfa, igual a DE sobre seno de beta despejando DE obtenemos DE igual a seno de alfa por seno de beta ahora sustituimos las igualdades de OD, OE y DE respectivamente y así llegamos a coseno de alfa más beta igual a coseno de alfa por coseno de beta, menos seno de alfa por seno de beta

$$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$$

$$\cos(\alpha+\beta) \quad \cos\alpha \cdot \cos\beta \quad \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$