Producción de los Resúmenes: Kharla Mérida

Ejercicio 1

Ejercicio 12. Desarrolla la expresión dada aplicando propiedades del logaritmo

Ejercicio 12

$$\log_b \sqrt[4]{\frac{\left(a^2 \cdot b^5\right)^3}{ab\left(a+b\right)}}$$

Debemos observar con detalle la expresión e identificar qué tenemos el argumento del logaritmo es una raíz cuarta el logaritmo de una raíz es el inverso del índice multiplicando al logaritmo de la cantidad sub-radical

$$\log_b \sqrt[4]{\frac{\left(a^2 \cdot b^5\right)^3}{ab\left(a+b\right)}} = \frac{1}{4}\log_b \frac{\left(a^2 \cdot b^5\right)^3}{ab\left(a+b\right)}$$

Queda 1 cuarto del logaritmo de la fracción ahora tenemos el logaritmo de un cociente o división esto es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador se coloca entre paréntesis porque el 1 cuarto está multiplicando al logaritmo de la fracción, por lo tanto afecta a todo lo que se desarrolle de este logaritmo

$$= \frac{1}{4}\left(\log_b \boxed{\left(a^2 \cdot b^5\right)^3} - \log_b \boxed{ab\left(a+b\right)}\right)$$

El primer término es el logaritmo de una potencia, así que el 3 baja a multiplicar al logaritmo de la base de la potencia el segundo término es un producto de tres factores, como está precedido de signo menos, colocaremos entre paréntesis el desarrollo del logaritmo del producto, son tres factores, entonces son 3 logaritmos

$$=\frac{1}{4}\left(\log_b\left(a^2\cdot b^5\right)^3-\log_b ab(a+b)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[3\log_b\left(a^2\cdot b^5\right)-\left(\log_b a+\log_b b+\log_b(a+b)\right)\right]$$

Tenemos aquí el logaritmo de un producto, colocaremos el desarrollo de este logaritmo entre paréntesis porque el 3 afecta a todos los términos hemos cambiado los primeros paréntesis por corchetes para distinguir mejor cada grupo

$$=\frac{1}{4}\left[3\log_b\left(a^2\cdot b^5\right)-\left(\log_b a+\log_b b+\log_b(a+b)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[3\left(\log_b a^2+\log_b b^5\right)-\left(\log_b a+\log_b b+\log_b(a+b)\right)\right]$$

En los dos términos del primer paréntesis tenemos logaritmo de una potencia bajaremos los exponentes a multiplicar a los logaritmos de las bases. Ahora aplicaremos propiedad distributiva del 3 respecto a esta suma y del menos respecto a esta suma

$$=\frac{1}{4}\left[3\left(2\log_b a+5\log_b b\right)-\left(\log_b a+\log_b b+\log_b(a+b)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[3\cdot 2\log_b a+3\cdot 5\log_b b-\log_b a-\log_b b-\log_b(a+b)\right]$$

Efectuamos los productos en los coeficientes de los primeros dos logaritmos y ahora aplicamos propiedad distributiva del 1 cuarto 6 4tos del logaritmo en base b de a + 15 4tos de logaritmo en base b de b – 1 4to del logaritmo en base b de a – 1 4to del logaritmo en base b de b – 1 4to del logaritmo en base b de (a+b)

$$=\frac{6}{4}\log_b a+\frac{15}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b a-\frac{1}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

Restamos los términos semejantes 6 4tos del logaritmo en base b de a – 1 4to del logaritmo en base b de a , es 5 4tos del logaritmo en base b de a 15 4tos de logaritmo en base b de b – 1 4to del logaritmo en base b de b, es 14 4tos del logaritmo en base b de b – 1 4to del logaritmo en base b de (a+b) que permanece igual

$$=\frac{6}{4}\log_b a+\frac{15}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b a-\frac{1}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

$$=\frac{5}{4}\log_b a-\frac{14}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

En el segundo término puede simplificarse el coeficiente dividiendo numerador y denominador entre 2 y puede sustituirse logaritmo en base b de b por 1 recordemos que este es un logaritmo notable esto es lo más que puede desarrollarse la expresión

$$=\frac{5}{4}\log_b a-\frac{7}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

$$=\frac{5}{4}\log_b a-\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

Existe con gran frecuencia la idea de desarrollar el logaritmo de una suma como la suma de los logaritmos… pero puede demostrarse de forma sencilla que es un error… quieres verlo?… Solicítalo a través de un comentario y apórtanos tus ideas

$$\boxed{\cancel{\log_b(a+b)=\log_b a+\log_b b}}$$

Puedes solicitar la justificación de esto a través de un comentario