



Repaso: Definición y Propiedades

Ejercicio 2

Probar que a sobre 3, más, a sobre 4 es igual a $a + 1$ sobre 4

$$\text{Probar que } \binom{a}{3} + \binom{a}{4} = \binom{a+1}{4}$$

Como nos piden probar esta igualdad, aplicaremos la fórmula para hallar el valor de los números combinatorios, a cada uno de los tres números combinatorios de la igualdad veamos

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para el primer número combinatorio, n es a y m es 3 sustituyendo en la fórmula nos queda $a!$ sobre $3!$ Por $(a-3)!$. Para el segundo número combinatorio, n es a y m es 4 sustituyendo en la fórmula nos queda $a!$ sobre $4!$ Por $(a-4)!$

$$\binom{a}{3} + \binom{a}{4} = \binom{a+1}{4} \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{a}{3} = \frac{a!}{3!(a-3)!} \quad \binom{a}{4} = \frac{a!}{4!(a-4)!}$$



Para el 3er número combinatorio, n es a + 1 y m es 4 sustituyendo en la fórmula nos queda (a + 1)! sobre 4! Por (a + 1 - 4)!. Efectuando la resta nos queda (a + 1)! sobre 4! Por (a - 3)!. Ahora cambiaremos cada número combinatorio por su valor, obtenido mediante la fórmula

$$\binom{a}{4} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\binom{a}{3} + \binom{a}{4} = \binom{a+1}{4}$$

$$\frac{a!}{3!(a-3)!} + \frac{a!}{4!(a-4)!} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

En la primera fracción, el factorial de a se desarrolla hasta (a - 3)!. Nos detenemos allí, para simplificar con (a - 3)! Del denominador. En la 2da fracción, el factorial de a se desarrolla hasta (a - 4)!. Nos detenemos allí, para simplificar con (a - 4)! Del denominador

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)!}{3!(a-3)!} + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3) \cdot (a-4)!}{4!(a-4)!} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Simplificamos los factores iguales en la 1ra y 2da fracción ahora el factorial de 3 es 6 y el factorial de 4 es 24

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \cancel{(a-3)!}}{3! \cdot \cancel{(a-3)!}} + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3) \cdot \cancel{(a-4)!}}{4! \cdot \cancel{(a-4)!}} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{6} + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$



Despejemos la pantalla y subimos esta igualdad para hacer espacio y continuar la simplificación de fracciones

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{6} + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Ahora efectuamos la suma de fracciones el mínimo común múltiplo entre 6 y 24 es 24 así que tendremos una nueva fracción con 24 de denominador 24 entre 6 es 4 que multiplica al numerador 24 entre 24 es 1 que multiplica al numerador

$$4 \cdot \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{6} + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$m.c.m._{\{6,24\}} = 24$

$$\frac{4a \cdot (a-1) \cdot (a-2) + a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Los factores a , $(a-1)$ y $(a-2)$ son comunes a ambos términos entonces los extraemos dejando en ambos términos los factores restantes podemos eliminar el paréntesis sin cambiar los signos porque lo precede un signo positivo

$$\frac{4a \cdot (a-1) \cdot (a-2) + a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (4 + a - 3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$



Efectuamos la resta despejamos nuevamente la pantalla y subimos la última igualdad para poder seguir desarrollando

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a+1)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Reorganizamos los factores del numerador colocando $(a+1)$ de 1ro en el segundo lado de la igualdad desarrollamos el factorial del numerador, hasta $(a-3)$ para poder simplificarlo con el del denominador

$$\frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a+1)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\frac{(a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{24} = \frac{(a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot (a-3)!}{4!(a-3)!}$$

Simplificamos el factor $(a-3)!$ De numerador y denominador y desarrollamos $4!$ En el denominador y nos queda 24 de esta manera obtenemos fracciones iguales a ambos lados y comprobamos la igualdad

$$\frac{(a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{24} = \frac{(a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \cancel{(a-3)!}}{4! \cdot \cancel{(a-3)!}}$$

$$\frac{(a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{24} = \frac{(a+1) \cdot a \cdot (a-1) \cdot (a-2)}{24}$$