Repaso: Definición y Propiedades

Ejercicio 2

Probar que a sobre 3, más, a sobre 4 es igual a a + 1 sobre 4

Probar que $\binom{a}{3}+\binom{a}{4}=\binom{a+1}{4}$

Como nos piden probar esta igualdad, aplicaremos la fórmula para hallar el valor de los números combinatorios, a cada uno de los tres números combinatorios de la igualdad veamos

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para el primer número combinatorio, n es a y m es 3 sustituyendo en la fórmula nos queda a! sobre 3! Por (a – 3)!. Para el segundo número combinatorio, n es a y m es 4 sustituyendo en la fórmula nos queda a! sobre 4! Por (a – 4)!

$$\binom{a}{3}+\binom{a}{4}=\binom{a+1}{4} \qquad \binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{a}{3}=\frac{a!}{3!(a-3)!} \qquad \binom{a}{4}=\frac{a!}{4!(a-4)!}$$

Para el 3er número combinatorio, n es a + 1 y m es 4 sustituyendo en la fórmula nos queda (a + 1)! sobre 4! Por (a + 1 – 4)!. Efectuando la resta nos queda (a + 1)! sobre 4! Por (a – 3)!. Ahora cambiaremos cada número combinatorio por su valor, obtenido mediante la fórmula

$$\binom{a}{4}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\binom{a}{3}+\binom{a}{4}=\binom{a+1}{4}$$

$$\frac{a!}{3!(a-3)!}+\frac{a!}{4!(a-4)!}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

En la primera fracción, el factorial de a se desarrolla hasta (a – 3)!. Nos detenemos allí, para simplificar con (a – 3)! Del denominador. En la 2da fracción, el factorial de a se desarrolla hasta (a – 4)!. Nos detenemos allí, para simplificar con (a – 4)! Del denominador

$$\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)!}{3!(a-3)!}+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)\cdot(a-4)!}{4!(a-4)!}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Simplificamos los factores iguales en la 1ra y 2da fracción ahora el factorial de 3 es 6 y el factorial de 4 es 24

$$\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot\cancel{(a-3)!}}{\boxed{3!}\cancel{(a-3)!}}+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)\cdot\cancel{(a-4)!}}{\boxed{4!}\cancel{(a-4)!}}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Despejemos la pantalla y subimos esta igualdad para hacer espacio y continuar la simplificación de fracciones

$$\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Ahora efectuamos la suma de fracciones el mínimo común múltiplo entre 6 y 24 es 24 así que tendremos una nueva fracción con 24 de denominador 24 entre 6 es 4 que multiplica al numerador 24 entre 24 es 1 que multiplica al numerador

$$4\quad\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{6}+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}\quad 1$$

$$m.c.m._{\{6,24\}}=24$$

$$\frac{4a\cdot(a-1)\cdot(a-2)+a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Los factores a, (a – 1) y (a – 2) son comunes a ambos términos entonces los extraemos dejando en ambos términos los factores restantes podemos eliminar el paréntesis sin cambiar los signos porque lo precede un signo positivo

$$\frac{4a\cdot(a-1)\cdot(a-2)+a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(4+a-3)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Efectuamos la resta despejamos nuevamente la pantalla y subimos la última igualdad para poder seguir desarrollando

$$\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a+1)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Reorganizamos los factores del numerador colocando (a + 1) de 1ro en el segundo lado de la igualdad desarrollamos el factorial del numerador, hasta (a – 3) para poder simplificarlo con el del denominador

$$\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a+1)}{24}=\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\frac{(a+1)\cdot a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{24}=\frac{(a+1)\cdot a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)!}{4!(a-3)!}$$

Simplificamos el factor (a – 3)! De numerador y denominador y desarrollamos 4! En el denominador y nos queda 24 de esta manera obtenemos fracciones iguales a ambos lados y comprobamos la igualdad

$$\frac{(a+1)\cdot a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{24}=\frac{(a+1)\cdot a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot\cancel{(a-3)!}}{4!\cancel{(a-3)!}}$$

$$\frac{(a+1)\cdot a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{24}=\frac{(a+1)\cdot a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{24}$$